1

a) Dalla definizione di f vediamo che:

$$\begin{cases} f(v_1) = 2 \cdot v_4 \\ f(v_2) = 2 \cdot v_3 \\ f(v_3) = 2 \cdot v_2 \\ f(v_4) = 2 \cdot v_4 \end{cases}$$

Per cui la matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}$ è

$$M^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sia $u = v_1 + 3v_2 + 5v_3 + 7v_4$.

Allora

$$[f(u)]_{\mathcal{B}} = M^{\mathcal{B}}(f) \cdot [u]_{\mathcal{B}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 6 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$f(v_1 + 3v_2 + 5v_3 + 7v_4) =$$

$$= 10v_2 + 6v_3 + 16v_4.$$

(b) Il polinomio caratteristico di f è

$$P_f(x) = \mathrm{Det}\left(M^{\mathcal{B}}(f) - x \cdot I\right)$$

$$= \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -x & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2-x \end{pmatrix} =$$

$$= (2-x)\cdot(-x)(x^2-4) =$$

$= X \cdot (X-2)^2 \cdot (X+2)$

Pertanto gli autovalori di f sono $0, 2, -2$.

Troviamo una base per ciascuno degli autospazi di f:

$$V_0: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} 2z = 0 \\ 2y = 0 \\ 2x + 2t = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$V_0 = \{(-t,0,0,t) : t \in \mathbb{R}\}$$

$$= \mathcal{L}((-1,0,0,1)_{\mathcal{B}}) = \mathcal{L}(-V_1 + V_4)$$

$$V_2 : \begin{pmatrix} 0-2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0-2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0-2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x = 0 \\ -2y + 2z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \\ 2x = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

$$V_2 = \{(0, z, z, t) : z, t \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \mathcal{L}((0,1,1,0)_{\mathcal{B}}, (0,0,0,1)_{\mathcal{B}}) =$$

$$= \mathcal{L}(v_2 + v_3, v_4)$$

$$V_{-2}: \begin{pmatrix} 0-(-2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0-(-2) & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0-(-2) & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2-(-2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y + 2z = 0 \\ 2x + 4t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \\ t = 0 \end{cases}$$

$V_{-2} = \{ (0, -z, z, 0) : z \in \mathbb{R} \}$
$= \mathcal{L}((0,-1,1,0)_{\mathcal{B}}) = \mathcal{L}(-v_2 + v_3)$

Poiché $\dim(V_0) +$
$+ \dim(V_2) + \dim(V_{-2}) =$
$= 1 + 2 + 1 = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$
f è un endomorfismo semplice.

(b) La controimmagine di $v = 2v_2 + 4v_3 + 6v_4$

(espresse in termini della base $\mathcal{B}$) è l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2z = 2 \\ 2y = 4 \\ 2x + 2t = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} z = 1 \\ y = 2 \\ x = 3 - t \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow f^{-1}(V) = \{ (3-t, 2, 1, t)_{\mathcal{B}} : t \in \mathbb{R} \} =$$

$$= \{ (3-t) v_1 + 2 v_2 + v_3 + t \cdot v_4 : t \in \mathbb{R} \}.$$

(2)

Osserviamo che r ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t-1 \\ z = -t+4 \end{cases}$$

quindi un suo vettore direttivo è:

$$v_r = i - J - K.$$

(e) Il generico piano contenente l'asse z ha equazione:

$\lambda x + \mu y = 0 \qquad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

e quindi ha vettore normale $\lambda \cdot i + \mu \cdot J$.

Tale piano è parallelo a r se e solo se un suo vettore normale è ortogonale a un vettore direttivo di r, ovvero se e solo se

$\lambda \cdot 1 + \mu \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) = 0 \iff$

$\lambda = \mu$. Sostituendo otteniamo che π ha equazione

$x + y = 0$.

(b) Determiniamo il punto di incidenza di r e s. Il generico punto di r è $P_t = (t, -t-1, -t+4)$

Poiché s è incidente

è ortogonale a r

e passa per O

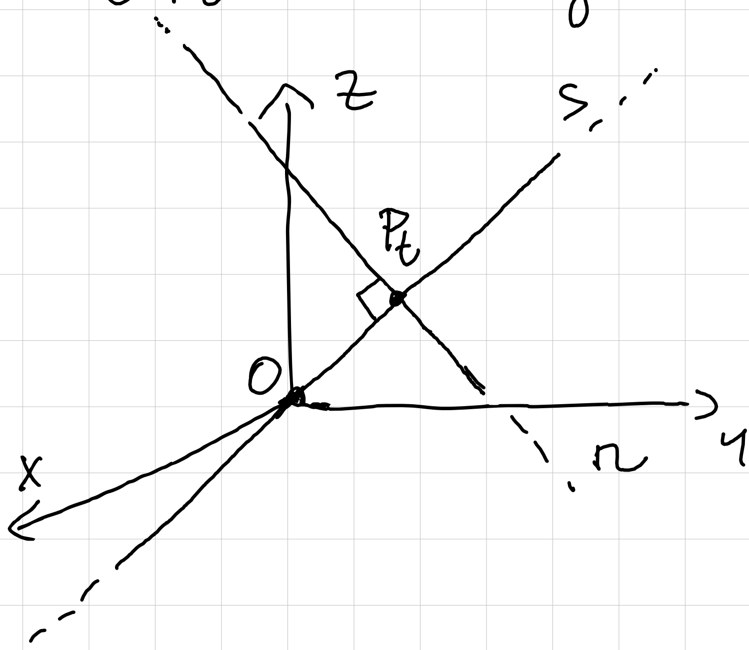
per determinare il

punto di incidenza

delle due rette,

basta imporre che

$\overrightarrow{OP_t}$ sia ortogonale a v_r



ovvero che

$\overrightarrow{OP_t} \cdot V_r = 0 \iff$

$(t i + (-t-1) \cdot j + (-t+4) \cdot k) \cdot$

$\cdot (i - j - k) = 0 \iff$

$t \cdot 1 + (-t-1) \cdot (-1) +$

$+ (-t+4) \cdot (-1) = 0 \iff$

$t + t + 1 + t - 4 = 0 \iff$

$t = 1$. Quindi il

punto d'incidenza

di r e ɔ è

$$P_1 = (1, -2, 3)$$

La retta s è pertanto la retta passante per O e P_1 ovvero la retta di equazioni cartesiane

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-0}{-2-0} = \frac{z-0}{3-0}$$

Per calcolare la distanza di O e r, osserviamo che P_1 non è altro che la proiezione ortogonale di O su r e quindi, per quanto visto a lezione,

$$d(O,r) = d(O,P_1) =$$

$$= \sqrt{(1-0)^2+(-2-0)^2+(3-0)^2} = \sqrt{14}$$